数理解析研究所講究録
962巻 1996年 81-85

Realizability of parameter sets for association schemes in terms of vertex independence problem

宗政 昭弘 (Akihiro Munemasa)
九州大学数理学研究科

1 Brauer's problem and vertex independence problem

Vertex independence problem とは、与えられた finite simple undirected graph $\Gamma=(V,E)$ に対して次で定義される independence number $\alpha(\Gamma)$ を決定せよ、ということである。

$$\alpha(\Gamma)=\max\{|S| \mid S\subset V,\ S \text{ is independent}\}.$$

ただし、 $S\subset V$ が independent であるとは、任意の $x,y\in S$ に対して $(x,y)\notin E$ となるときをいう。本稿の目的は、 association scheme の parameter set の実現問題は vertex independence problem に帰着できることを示すことである。 C. Zaverdinos [1] が最近、有限群の指標表に関する同様の問題が vertex independence problem に帰着できることを示したのを知り、association scheme の parameter set の場合の類似ができないかと考えて得られた結果である。

まず、 C. Zaverdinos [1] の結果の概略を述べよう。 Brauer の述べた問題として、どんな複素正方行列が有限群の指標表になりうるか、という問題がある。もちろん、有限群の指標表には、指標の直交関係や、成分が円分体に含まれる代数的整数でなければならないなど、さまざまな制約があるが、そのような制約をつけた場合でも、与えられた複素正方行列がある有限群の指標表になるかどうかを効率的に判定するアルゴリズムは知られていない。一方、良く知られているように、有限群の指標表と、 class multiplication coefficients とは、同じ情報をもっている、すなわち、指標表から class multiplication coefficients を計算する公式が存在し、ま

た、原理的には、 class multiplication coefficients から指標表を求めることができる。ここで、 class multiplication coefficients とは、次で定義される c_{ij}^h $(i,j,h=0,1,\ldots,d)$ である。

$$c_{ij}^h = |\{(x,y)\in C_i\times C_j | xy=z\}|.$$

ただし、 $C_0,C_1,\ldots,C_d$ は群 G の共役類であり、 z は C_h の一つの元である。したがって、 Brauer の問題は、 $(d+1)^3$ 個の非負整数 c_{ij}^h $(i,j,h=0,1,\ldots,d)$ が与えられたとき、これらを class multiplication coefficients としてもつような有限群が存在するか、と言い替えることができる。 Zaverdinos は、この言い替えを用いて、 Brauer の問題が vertex independence problem に帰着されることを証明した。そのために、与えられた $(d+1)^3$ 個の非負整数 c_{ij}^h $(i,j,h=0,1,\ldots,d)$ から、ある graph Γ を構成し、 $\alpha(\Gamma)$ がある値になるときに限り c_{ij}^h $(i,j,h=0,1,\ldots,d)$ を class multiplication coefficients としてもつような有限群が存在することを示している。

本稿では、同様の構成法により、 association scheme の parameter set の候補から、ある graph Γ を構成し、 $\alpha(\Gamma)$ がある値になるときに限りその parameter set を実現するような association scheme が存在することを示す。

2 Association schemes

まず、 association scheme の定義を述べる。 X を有限集合とし、 R_i $(i=0,\ldots,d)$ を $X\times X$ の部分集合とする。 $(X,\{R_i\}_{i=0,\ldots,d})$ が association scheme であるとは、次の条件を満たすときをいう。

(i) $R_0=\{(x,x)|x\in X\}$.

(ii) $R_0\cup R_1\cup\ldots\cup R_d = X\times X$ で、任意の i,j $(i\neq j)$ に対して $R_i\cap R_j=\emptyset$.

(iii) 任意の i に対してある $i'\in\{0,1,\ldots,d\}$ が存在して $R_i^t := \{(y,x)|(x,y)\in R_i\} = R_{i'}$.

(iv) $|\{z\in X|(x,z)\in R_i,(z,y)\in R_j\}|$ は $(x,y)\in R_h$ である限り (x,y) のとりかたによらない定数であり、それを p_{ij}^h と書く。

上の定義で、 p_{ij}^h $(i,j,h=0,1,\ldots,d)$ を association scheme の parameters という。 Association scheme における parameters を有限群における class multiplication coefficients の類似と考えよう。(実際、group association scheme と呼ばれる、群からつくられる association scheme においては、 parameters は class multiplication coefficients そのものである。しかし、これから述べる結果は、 Zaverdinos の結果の一般化にはなっていない。なぜなら、 class multiplication coefficients の候補を parameters としてもつような association scheme の存在は、それに対応する有限群の存在を保証しているわけではないからである。) すると、Brauer の問題の類似は次のようになる。 $(d+1)^3$ 個の非負整数 p_{ij}^h $(i,j,h=0,1,\ldots,d)$ が与えられたとき、これらを parameters としてもつような association scheme が存在するか。本稿では、この問題が vertex independence problem に帰着されることを示す。

そこで、 $\mathcal{P}$ を $(d+1)^3$ 個の非負整数の array $(\{p_{ij}^h\}_{i,j,h=0,1,\ldots,d})$ とする。もし $\mathcal{P}$ がある association scheme の parameter set ならば、 $D=\{0,1,\ldots,d\}$ のある置換 σ が存在して、

$$p_{i0}^h = \delta_{ih} \tag{1}$$
$$p_{0j}^h = \delta_{jh} \tag{2}$$
$$p_{ij}^0 = \delta_{i\sigma(j)}k_i, \quad k_i>0 \tag{3}$$

となる。さらに、

$$\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^h = k_i \tag{4}$$

が成り立つ。他にも $\mathcal{P}$ が満たすべき条件はあるが、とりあえずここでは以上のみを仮定する。 $\mathcal{P}$ を parameter set にもつ association scheme が存在したとすると、

$$n=\sum_{i=0}^{d} k_i \tag{5}$$

はその association scheme の点の数になる。

Lemma 1 $\mathcal{P}$ を上のとおりとし、 $\{R_i\}_{i=0}^d$ を $X\times X$ の *partition* とする。ただし、 X は n 点からなる有限集合である。さらに、

$$R_{\sigma(i)}=\{(x,y)\in X\times X|(y,x)\in R_i\} \qquad \forall i=0,1,\ldots,d$$

を仮定する。このとき、 $(X,\{R_i\}_{i=0}^d)$ が $\mathcal{P}$ を *parameter set* にもつ *association scheme* になる必要十分条件は、すべての i,j,h と $(x,z)\in R_h$ に対して、不等式

$$|\{y\in X|(x,y)\in R_i,\ (y,z)\in R_j\}|\le p_{ij}^h$$

が成り立つことである。

3 Construction of the graph Γ

$\mathcal{P}$ を (1)-(4) を満たす非負整数の array とする。また、 n を (5) で定義し、 X を n 点からなる有限集合とする。このとき、 graph Γ を次で定義する。 Γ の頂点集合 V は

$$V=\{(x,y,z,i,j,h,r)\in X\times X\times X\times D\times D\times D\times \mathbf{Z}|1\le r\le p_{ij}^h\}$$

であり、二つの相異なる頂点 $\xi=(x,y,z,i,j,h,r)$, $\xi'=(x',y',z',i',j',h',r')$ が、以下の条件のうち少なくとも一つを満たすとき辺で結ぶ。

(i) $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$,

(ii) $x=x'$, $y=y'$, $i\ne i'$,

(iii) $x=x'$, $y=z'$, $i\ne h'$,

(iv) $x=y'$, $y=z'$, $i\ne j'$,

(v) $x=x'$, $y\ne y'$, $z=z'$, $i=i'$, $j=j'$, $h=h'$, $r=r'$,

(vi) $x=y'$, $y=x'$, $i\ne\sigma(i')$.

このとき、得られた結果は次のとおりである。

Theorem 2 $\mathcal{P}$ を (1)-(4) を満たす非負整数の *array* とする。このとき、 $\mathcal{P}$ を *parameter set* としてもつような *association scheme* が存在するための必要十分条件は、 *graph* Γ の *independence number* $\alpha(\Gamma)$ が n^3 となることである。

この定理の本質は、十分性を示すところにあるが、必要性の証明だけここに述べておく。なぜなら、必要性の証明を見ることにより、十分性の証明をするために何をしたらいいかが良くわかるからである。

そこで、 $(X,\{R_i\}_{i=0,\dots,d})$ を $\mathcal{P}$ を parameter set としてもつ association scheme とする。 S を、 graph Γ の次のような頂点 (x,y,z,i,j,h,r) の集合とする：

$(x,y) \in R_i$, $(y,z) \in R_j$, $(x,z) \in R_h$, また r は y の "counter," すなわち、(x,z,i,j) を固定したとき、

$$\{y \in X | (x,y) \in R_i,\ (y,z) \in R_j\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$$

として、 $y = y_r$ のとき $(x,y,z,i,j,h,r) \in S$ とする。このように定義した S が graph Γ の independence set になることは容易にチェックできる。

Remark. 定理の主張は、 graph Γ に次の辺を加えても成り立つ。
(vii) $x = x'$, $z = z'$, $h \neq h'$,
(viii) $y = y'$, $z = z'$, $j \neq j'$,

参考文献

[1] C. Zaverdinos, When is a complex matrix a character table? A reduction to vertex independence, Ars Combin., 39 (1995), 183–188.